Yläkoulun matematiikkaa

Taivas alkaa ruohonkorsien yläpuolelta, sanoivat lentämisen pioneerit. Mistä matematiikka alkaa?

Ilmeisesti ensimmäisistä matemaattisia objekteja koskevien säännönmukaisuuksien ymmärtämisestä.

Seuraavassa tutkaillaan erästä laajasti käytössä olevaa yhdeksännen luokan oppikirjaa siteeraten alkaako matematiikka yläkoulussa ollenkaan.

AVARUUSGEOMETRIAA (9. LUOKKA)

Pari kirjan esimerkkiä avaruusgeometriasta.

Esim. 1 Pallo on suorassa ympyrälieriössä, johon se nippanappa sopii. Lieriön pohjan ja pallon halkaisija on 10 cm. Verrattava lieriön vaipan ja pallon pinta-aloja.

Kirjassa on kuva lieriöstä ja pallosta. Halkaisijat sekä lieriön korkeus on merkitty erikseen 10 sentiksi. Pinta-alat todetaan *likiarvoja vertaamalla* yhtäsuuriksi.

Esim. 2 Pallo on kuution muotoisessa laatikossa ja sivuaa kuution tahkoja. Kuinka monta prosenttia laatikkoon jää tyhjää tilaa? Kuution särmän pituus on $5{,}2\,\mathrm{cm}$.

Kirjassa on kuvio, johon $5{,}2\,\mathrm{cm}$ merkitty ja tulos on laskettu ainoastaan likiarvona.

Kummassakaan esimerkissä ei tuoda esiin kappaleiden koosta riippumatonta ratkaisua, vaan *normiksi asetetaan likiarvoilla laskeminen*.

Tyypillinen tehtävä näyttää seuraavalta:

Neljä tennispalloa on pakattu päällekkäin suoran ympyrälieriön muotoiseen rasiaan siten, että rasian pohja ja kansi sivuavat alinta ja ylintä palloa. Laske rasian pinta-ala. Tennispallon halkaisija on $2{,}56''$ ja $1'' = 2{,}54\,\mathrm{cm}$.

Käytännössä kaikki tehtävät edellyttävät desimaalilukujen pyörittelyä laskimella. Lähes kaikki tehtävät on varustettu kuviolla. Kun niihin vielä on merkitty annetut tiedot kohdilleen, ei oppilaan tarvitse hahmottaa tilannetta omilla aivoillaan. Liiallinen havainnollistaminen tyrehdyttää käsitteellisen ajattelun kehittymisen.

Opettajakoulutuksessa kasvatusopin ja aineopintojen suhde on kääntynyt sellaiseksi, että nähdyt esimerkit ratkaisuineen eivät nuoremmista opettajista välttämättä tunnu kummallisilta. Kasvatusoppineiden voimakas sekaantuminen matematiikan opetukseen on johtanut ajattelua estäviin oppimiskäytäntöihin ja opetusmateriaaleihin.

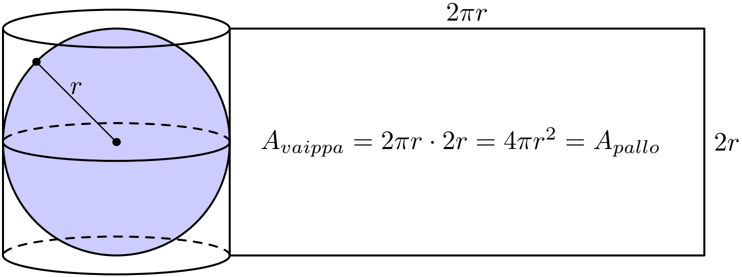
MATEMATIIKKA ON MUUTTUNUT
DESIMAALIMÖSSÖKSI!

Avaruusgeometrian osio ei ole mikään poikkeus. Kaikki muutkin asiat on käsitelty yhtä ei-matemaattisesti. Polynomien kertolaskuja $(2x+1)(x-3)$ lasketaan sinne-tänne ilman päämäärää ja tarkoitusta. Rakenteellisiin ratkaisuihin viittavat asiat, kuten $(a-b)(a+b)$, on kätketty syventävien osioiden marginaaleihin. Yhdenmuotoisuutta ja verrantoja esitellään, mutta trigonometristen funktioiden riippumattomuus kolmion koosta perustellaan sivuja mittaamalla. Myös π määritellään empiirisesti, vaikka se onnistuisi kätevästi verrannon avulla ympyröiden yhdenmuotoisuuteen vedoten.

Ei tarvitse ihmetellä, miksi matematiikka koetaan perus-koulun tylsimmäksi oppiaineeksi! Kuka tahansa kirjanpitäjä voi opettaa laskimen näpelöintiä valmiiden kaavojen mukaan. Poliitikot ovatkin väläytelleet eräiden julkisten virkojen kelpoisuusehtojen väljentämistä.

MIKÄ NEUVOKSI?

Matematiikan on yläkoulussakin oltava ikuisien totuuksien löytämistä:



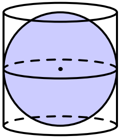
Matematiikka on palautettava matematiikan opetukseen!

Seuraavassa eräitä ajatuksia, miten kappaleista saisi mielenkiintoista eriyttävää pohdintaa.

1. Aivan aluksi, oppilas on opastettava tajuamaan lieriö, kartio, kuutio ja pallo matemaattisiksi abstraktioiksi, esineiksi sinänsä. Ei siis pitäisi puhua tenniksestä, koriste-esineistä yms. joka ainoan tehtävän yhteydessä. Matematiikka *ei ole* ympäristöoppia eikä fysiikkaa.

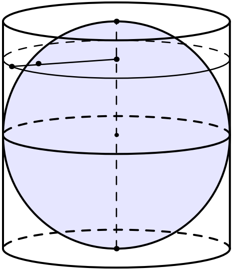
   Kaikki eivät kykene abstrahoimaan kappaleita eikä muutakaan mielessään, joten tässä on eriyttämisen paikka. Siihen tarvitaan kaksi opsia ja niitä vastaavat oppimateriaalit. MAOLin on tuotava tämä selkeästi esiin päättäjien kanssa keskustellessaan.

2. Pallon ja lieriön vaipan pinta-alojen yhtäsuuruus houkuttelee kokeilemaan tennispallon pakkaamista



vaipan kokoiseen paperiin. Yritys kuitenkin epäonnistuu, sillä paperi rypistyy eikä peitä palloa kokonaan. Vaippa olisi revittävä äärettömäksi määräksi äärettömän pieniä paloja, jotka sopivasti aseteltuina peittäisivät pallon. Tämä johtuu pallopinnan ja suoristuvan vaipan erilaisesta differentiaaligeometrisesta olemuksesta, minkä opettaja osaa aineopintojensa perusteella kuvailevasti selittää. Kirjanpitäjän taidot eivät onneksi siihen riitä, joten aineenopettajat säilyttänevät virkansa jatkossakin.

3. Voidaan myös tutkia alkeellista karttaprojektiota. Kuvion osoittamalla tavalla saadaan yksilehtinen

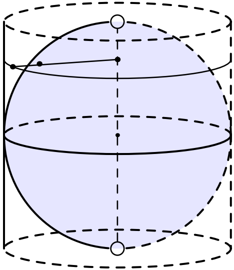


kartta maapallosta. Siitä saa monta mielekästä kysymystä. Mitkä alueet kuvautuvat lähes oikein, mitkä vääristyvät pahasti? Miten kuvautuvat navat, meridiaanit ja leveyspiirit?

Edelleen voidaan kysyä, miten Suomi kuvautuu kartalle, eli kuinka monta prosenttia Suomen pituus ja leveys muuttuvat ja mihin suuntaan? Pohjois-etelä-suunnassa Suomi sijaitsee välissä $[60^\circ, 70^\circ]$ pohjoista leveyttä ja itä-länsi-suunnassa välissä $[20^\circ, 30^\circ]$ itäistä pituutta.

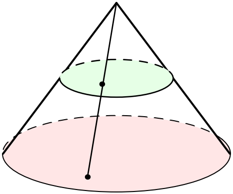
Miksi Suomi ei ole jotakin neliön ja ympyrän väliltä? Astelukujen erotushan on 10° molempiin suuntiin.

4. Poistamalla pallosta navat ja niitä yhdistävä isoympyrän



kaari, saadaan yksi-yhteen kuvaus pallon pinnalta reunattomalle suorakulmiolle. Nyt herää todella mielenkiintoinen kysymys: Johtuuko näiden pintojen pisteiden sama lukumäärä pinta-alojen yhtäsuuruudesta?

Vastaus saadaan kartiosta. Piirtämällä sen kärjestä



puolisuoria, jotka leikkaavat kartion pohjan, saadaan pohjan ja välipohjan välille yksi-yhteen kuvaus, vaikka näiden pohjien pinta-alat ovat erisuuret.

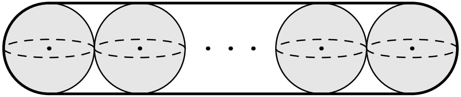
Tehtävä: Osoita sopivalla geometrisella konstruktiolla, että kaikissa väleissä $]0,r[$ on yhtä paljon reaalilukuja.

5. Asetetaan n palloa putkirasiaan ja kysytään, kuinka suuren osan ne täyttävät rasian tilavuudesta.

Huomataan, että tilavuuksien suhde on n:stä ja säteestä riippumatta $2:3$. Tämä on Arkhimedeen[1] yhdelle pallolle toteama tulos 2200 vuoden takaa.

[1] Arkhimedes (287–212 eaa.), kreikkalainen matemaatikko.

6. Edelleen n palloa putkessa, mutta nyt putken päät on pyöristetty päätypallojen pintaa myötäileviksi. Kuinka



n palloa

suuren osan pallot täyttävät putken tilavuudesta?

Osoittautuu, että

$$\frac{V_{\text{pallot}}}{V_{\text{putki}}} = \frac{2n}{3n-1}.$$

Verrataan tulosta edellisessä kohdassa saatuun ja mietitään mitä tapahtuu, jos pallojen määrää lisätään.

Tämän esimerkin käsittely tosin edellyttäisi, että vastaavia rationaalilausekkeita olisi aikaisemmin sievennetty. Näin ei ole, ja tyypin

$$\frac{8x^2 - 12x}{4x}$$

lausekkeitakin käsitellään vasta myöhemmin. Oppimäärä rakentuu epäloogisesti. Opittavat asiat eivät tue toisiaan.

POLYNOMIEN LASKUTOIMITUKSIA (9. LUOKKA)

Tehtävissä esiintyy termejä x^2 ja x^3, mutta lausekkeita korotetaan potensseihin ainoastaan syventävän osaston tutkimustehtävissä. Kaikille yhteisestä tehtäväosastosta löytyi kolme alakohtaa:

$$(x+1)(x-1)$$
$$(x+2)(x+2)$$
$$(x+9)(x-9).$$

Näin vähäinen määrä harjoitusta ei johda yleisen säännön havaitsemiseen eikä anna edellytyksiä tarpeellisten rutiinien omaksumiseen.

Kertolaskuja kuten $(x+3)(2x-1)$ on toki osattava, mutta ne eivät näytä johtavan mihinkään. Polynomilaskenta tuntuu oppilaista turhalta, koska sille ei löydy järkeviä sovelluksia.

Tehtävien

$$\begin{aligned}(1\pm x)^2 &= \ldots\\ (a\pm b)^2 &= \ldots\\ (2x+1)(2x-1) &= \ldots\\ (a+b)(a-b) &= \ldots\end{aligned}$$

kautta oivallettaisiin yleisiä sääntöjä, saataisiin työkaluja teoriakokonaisuuksien rakentamiseen ja päästäisiin myös mielekkäisiin sovelluksiin.

Esimerkiksi yhtälöstä

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

saadaan tunnetulla tavalla Pythagoraan lause.
Se puolestaan johtaa kosinin ja sinin väliseen yhtälöön

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

missä α on terävä kulma. Kun vielä huomataan, että

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

niin terävän kulman trigonometria on saatu mukavaan pakettiin, josta on hyvä jatkaa lukiossa. Nämä asiat kuitenkin puuttuvat peruskoulun opetussuunnitelmasta ja esiintyvät enintään oppikirjan marginaaleissa.

Tehtäväsarjan

$$
\begin{aligned}
(1-x)(1+x) &= \ldots \\
(1-x)(1+x+x^2) &= \ldots \\
(1-x)(1+x+x^2+x^3) &= \ldots \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

avulla päästäisiin geometriseen summaan

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Sijoituksella $x \to (-x)$ saadaan lisää mielenkiintoisia tuloja. Pascalin kolmiotakin voi näyttää laskemalla $(a+b)^n$ pienillä n:n arvoilla.

Tuloksia voisi soveltaa esim. alkeelliseen lukuteoriaan:

α) Osoita, että $2^{2n} - 1$ on kolmella jaollinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

β) Osoita, että jos $p\,(> 3)$ on alkuluku, niin $p^2 - 1$ on jaollinen luvulla 24.

γ) Osoita, että $7^n - 1$ on kuudella jaollinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

δ) Osoita, että jos $a\,(> 1)$ ja $n\,(> 1)$ ovat kokonaislukuja ja $a^n - 1$ on alkuluku, niin $a = 2$ ja n on alkuluku.

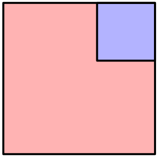
ε) Osoita, että summa

$$s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ei millään n:n arvolla saavuta arvoa 2.

ζ) Osoita, että jos n on kahden neliön summa, niin myös $2n$ on kahden neliön summa.

Mainittakoon, että Atle Selberg[1] kertoi lehtihaastattelussa



keksineensä kuusivuotiaana kuvion kaltaista koristelaudoitusta katsoessaan yhtälön

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

[1] Atle Selberg (1917–2007), norjalainen matemaatikko.

Selbergin yhtälö todistetaan kasiluokan oppikirjassa lisätehtävien marginaalissa. Ysiluokan kirjan vastaavassa kohdassa todistetaan myös summan ja erotuksen neliökaavat.

Näiden yhtälöiden tulisi olla keskeisellä paikalla polynomilaskennan yhteydessä. Ne olisi todistettava viimeistään 13-vuotiaille osittelu- ja vaihdantalain avulla.

Vielä vuonna 1980 ne opittiin seiskaluokan laajalla tasokurssilla. Nykyisin lukion pitkän matematiikan aloittavista vain harva on sisäistänyt ne osaksi keskushermostoaan.

Oppilas voi saada kiitettävän arvosanan peruskoulun matematiikasta, vaikka on epäselvää, tuleeko hän koskaan ymmärtämään perusalgebraa.

Näkemäni ja kokemani perusteella sanoisin, että nykyisessä peruskoulussa *toteutuva* matematiikan oppimäärä muistuttaa huomattavasti 35 vuotta sitten opettamaani suppean tasokurssin sisältöä. Laajan tasokurssin oppilaat on jätetty oman onnensa nojaan heitteille. Tämä on koulumatematiikan suurin ongelma ja perustava syy lukiossa ja lukion jälkeisissä oppilaitoksissa koettuihin matematiikan opetuksen ongelmiin.

Asiaan myötävaikuttaneet ovat hokeneet sotahuutoaan hienosti englanniksikin: Less is more! Olen kutsunut heitä sivistyksen tuhoajiksi. En edelleenkään keksi myönteisempää ilmaisua.

Myös Simo K. Kivelä on ilmaissut ihmetyksensä peruskoulun matematiikasta blogissaan `http://simokivela.blogspot.fi/2014_01_01_archive.html`.

Lukion matematiikkaa

Yläkoulun matematiikassa

- ei ole varsinaista perusalgebraa,
- ei ole varsinaista geometriaa,
- sisällöt eivät jäsenny loogisiksi kokonaisuuksiksi,
- päättelyä edellyttävä oppiaines puuttuu lähes kokonaan
- työskentely on pääasiassa laskukoneen käyttöä.

Matematiikka siis alkaa vasta lukiossa. Pitkän matematiikan valinneilla, ajattelemaan tottumattomilla oppilailla on siis melko korkea kynnys ylitettävänään.

Ratkaisuksi on esitetty, että tiettyjä vaikeiksi koettuja perusasioita ei enää tarvisisikaan osata. Riittää, että ostetaan laskukone, kaavakokoelma ja opetellaan jonkinlaista abstraktia ongelmanratkaisutaitoa. Less-is-more-henkilöiden tavoitteena näyttää olevan matematiikan hävittäminen lukiostakin.

Peter Hästö toteaa LUMA-sanomissa:

”Lukion opetussuunnitelmatyössä on noussut ajatus lukion aloittamisesta lyhyen ja pitkän matematiikan yhteisellä pakollisella kurssilla. Mikäli kurssi koskisi sisältötiedon sijaan ongelmanratkaisun opiskelua, se voisi olla hyvinkin mielekäs.”

ja edelleen:

”Rutiiniosaaminen on matematiikassa annetun reseptin (algoritmin) osaaminen, jonka tarkka käyttö takaa oikean ratkaisun. Sen vastakohtana didaktisessa tutkimuksessa on ongelmanratkaisu: ongelmatilanne on käsillä kun eteneminen vaatii uuden tehokkaamman lähestymistavan kehittämistä ratkaisun saavuttamiseksi.”

(`http://www.luma.fi/artikkelit/2589/kommentti-pisa-tulos-yllattavan-hyva`)

Ajatukset ovat yleviä, mutta ne johtavat käytäntöihin, joiden tuloksena on yleisen osaamistason aleneminen entisestään.

Rutiinien osaaminen ja ongelmien ratkaiseminen eivät ole toistensa vastakohtia. Useimmiten ”tehokkaamman lähestymistavan kehittäminen” perustuu jo opittujen rutiinien käyttämiseen uudella tavalla. Ei liene tarkoitus, että koululainen luo tyhjästä uutta matematiikkaa.

Hyvin laadituissa oppimateriaaleissa on sopivassa suhteessa rutiinien oppimiseen ja syventämiseen tarkoitettuja tehtäviä sekä soveltavia tehtäviä. Matematiikkaa voidaan soveltaa myös matematiikkaan. Matematiikka itsessään on jatkuvaa ongelmanratkaisua. (Voi tietenkin kysyä, onko meillä enää hyviä oppimateriaaleja.)

Esimerkiksi Hästön Dimensiossa antama mallitehtävä

Anna esimerkki kasvavasta funktiosta f, joka täyttää kaikki seuraavat ehdot:

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{\textit{a}}) & f(0) = 1, \\
\textbf{\textit{b}}) & f'(1) = 2, \\
\textbf{\textit{c}}) & f''(2) = 0, \\
\textbf{\textit{d}}) & (f^{-1})'(1) = 1/3.
\end{array}
$$

edellyttää monenlaisten rutiinien osaamista. Laskimesta ei juuri ole hyötyä eikä siitä, että näkee kaavakokoelmasta käänteisfunktion derivoimissäännön. Sääntö on täytynyt ymmärtää, jotta sen soveltaminen uudessa tilanteessa onnistuisi. Ymmärrys saavutetaan soveltamalla sääntöä vaihtelevissa tilanteissa ja käymällä läpi sen perustelu.

Laskimesta ja kaavakokoelmasta ei liioin ole apua seuraavissa "hevosvetoisissa mummomatematiikan" tehtävissä:

α) *Osoita, että*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

β) *Osoita, että funktio*

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$$

on aidosti kasvava välillä $]0,\pi[$.

Nämä jäänevät nykyisen opsin mukaan laadittujen oppikirjojen varassa opiskelevien ulottumattomiin.

Symbolisten laskimien ja kaavakokoelman käyttöä on perusteltu mm. sillä, että rutiineista vapautunutta aivokapasiteettia voi käyttää varsinaiseen matemaattiseen ajatteluun ja luovaan ongelmanratkaisuun. Tällainen puhe on ihmisaivojen halveksuntaa, ks. http://www.hs.fi/tiede/Supertietokone+jaksoi+mallintaa+ihmisaivojen+toimintaa+vain+sekunnin/a1389672278983

Rutiinien hallinta päinvastoin vapauttaa aivot luovaan ajatteluun. Musiikissa nähdään (ja kuullaan) sama ilmiö: Rock- ja pop-musiikin harmoniat hallitaan enintään neljällä soinnulla, mutta jazzmuusikoksi tai konserttimusiikin säveltäjäksi kehittyvän on tunnettava melkein rajaton määrä sointuja sekä niiden väliset harmoniset suhteet.

Mielestäni lukion pitkän matematiikan opetussuunnitelmaa on kehitettävä nykyisen tuntijaon sekä Solmun pääkirjoituksessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/2013/2/paak_2_13.pdf`

esittämäni hahmotelman pohjalta. Kattavalla kaavakokoelmalla ja symbolisella laskimella ei ole siinä sijaa. Oppiminen perustukoon omaan tekemiseen, ajatteluun ja ymmärtämiseen. Perustavaa laatua olevat asiat on opiskeltava perusteellisesti. Tällöin analyysiä opitaan nykyistä vähemmällä vaivalla ja lyhyemmässä ajassa.

Lyhyessä matematiikassa käytettäköön kaikkia mahdollisia laskuteknisiä apuvälineitä. Opetussuunnitelma on kehitettävä nykyistä paremmin vastaamaan yhteiskunnallisten, humanististen ja kaupallisten jatko-opintojen tarpeita.

Yhteenvetoa

Matematiikan oppimista on kehitettävä niin, että

- yläkoulun oppimäärää terävöitetään huomattavasti nykyistä käsitteellisempään suuntaan, mikä edellyttää selkeästi eriytettyä opetusta,
- oppilailla on peruskoulun päättyessä realistinen käsitys omista matemaattisista kyvyistään,
- lukion pitkä ja lyhyt matematiikka opiskellaan erillisinä,
- pitkän matematiikan opiskelu tapahtuu omaan ymmärrykseen tukeutuen ilman merkittäviä apuvälineitä,
- lyhyessä matematiikassa turvaudutaan kaikkiin mahdollisiin apuvälineisiin.

Dipolissa MAOLin kevätpäivillä 12042014

Markku Halmetoja